ISOTHERMES DU SOMMET TRIRECTANGLE

L'objet de cette page est d'établir quelques résultats utiles pour l'étude de la morphologie des bornes routières romaines. Il s'agit de trouver un moyen simple de prévoir les rayons de courbure des isothermes d'un trièdre de matériau homogène en déséquilibre thermique avec son environnement.

Pour faire simple, le trièdre $\mathcal{T}$ est trirectangle, son matériau ne comporte ni source ni puits de chaleur et la température T_0 à sa surface est maintenue constante. A l'instant initial $t_0 = 0$, la température $T(x, y, z, t_0)$ est nulle en tout point (x, y, z) intérieur au trièdre. On s'intéresse à la température différentielle relative

(1) $$U(x, y, z, t) = [T_0 - T(x, y, z, t)] / T_0$$

à un instant t > 0 quelconque au point (x, y, z) intérieur au trièdre $\mathcal{T}$, lequel est rapporté au repère trirectangle Oxyz constitué par ses trois arêtes.

Il s'agit d'un problème classique de diffusion de la chaleur, dit « problème de Dirichlet » : U(x, y, z, t) est nulle pour tout t > 0 sur la frontière du trièdre $\mathcal{T}$ et satisfait, à l'intérieur de $\mathcal{T}$, à l'équation d'évolution spatio-temporelle

(2) $$\Delta U = \frac{1}{D}\frac{\partial U}{\partial t}$$

où D, coefficient de diffusion thermique du matériau, est supposé constant dans $\mathcal{T}$.

La solution (unique) de ce problème est :

(3) $$U(x, y, z, t) = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) erf\left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}}\right) erf\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

où *erf*, dite « fonction d'erreur », est définie par :

(4) $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-s^2)\, ds.$$

Comme $erf(0) = 0$, il est immédiat de vérifier que U = 0 sur la frontière de $\mathcal{T}$ (pour $x = 0$, ou $y = 0$, ou $z = 0$). On vérifie aussi que U, donnée par (3), satisfait l'équation d'évolution (2).

Notre propos est d'étudier une isotherme (U = cste = K) à un instant t > 0 quelconque. $2\sqrt{Dt}$ est alors une constante et nous poserons, pour alléger l'écriture,

(5) $$L = 2\sqrt{Dt}\ ,$$

quantité ayant la dimension d'une longueur.

A) COURBURE AU SOMMET S D'UNE ISOTHERME

L'équation de l'isotherme définie par la température différentielle relative K s'écrit :

(6) $$erf(x/L)\, erf(y/L)\, erf(z/L) = K.$$

On note que l'expression (6) est à variables séparées en x, y et z et fait intervenir la même fonction *erf* suivant les trois coordonnées. La courbure moyenne au sommet S (x_S, x_S, x_S) de l'isotherme est donnée, au signe près, par la demi-divergence de la normale unitaire **n** en ce point :

(7) $$C = -\left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{div}(\mathbf{n}),$$

avec

(8) $$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{grad}\ \mathrm{U}}{||\mathbf{grad}\ \mathrm{U}||}\ .$$

Les dérivations impliquées par (7) et (8) sont facilitées en adoptant les nouvelles variables sans dimensions :

(9) $$u = x/\mathrm{L}\ ;\ v = y/\mathrm{L}\ ;\ w = z/\mathrm{L}.$$

Ces dérivations et la valeur de la dérivée première de *erf* :

(10) $$\mathrm{d_u}\ erf\,(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\mathrm{u}^2),$$

conduisent à l'expression suivante de **grad** U :

(11) $$\mathbf{grad}\ \mathrm{U} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \mathbf{G},$$

avec

(12) $$\mathbf{G} = [\exp(-u^2)\ erf\,(v)\ erf\,(w)\ ;\ \exp(-v^2)\ erf\,(w)\ erf\,(u)\ ;\ \exp(-w^2)\ erf\,(u)\ erf\,(v)].$$

Le vecteur **n** peut être écrit $\mathbf{n} = \lambda\ \mathbf{G}$, avec

(13) $$\lambda = [\exp(-2u^2)\ erf^{\,2}(v)\ erf^{\,2}(w) + \exp(-2v^2)\ erf^{\,2}(w)\ erf^{\,2}(u) + \exp(-2w^2)\ erf^{\,2}(u)\ erf^{\,2}(v)]^{-1/2}.$$

Pour alléger l'écriture, nous écrirons aussi (13) sous la forme $\lambda = [\mathrm{E}]^{-1/2}$ en notant E la quantité entre crochets.

Le calcul de la courbure (7) est effectué au point S, sommet de l'isotherme, situé sur l'axe de symétrie ternaire du trièdre $\mathcal{T}$. Le calcul de div(**n**) est facilité par le fait qu'au point S ($u = v = w$) le vecteur **n** a trois composantes identiques. Il nous suffira d'en calculer une seule.

Avec $\mathbf{n} = \lambda\ \mathbf{G}$, il vient :

(14) $$\mathrm{div}(\mathbf{n}) = \lambda\ \mathrm{div}(\mathbf{G}) + \mathbf{grad}\ \lambda.\mathbf{G}$$

a) <u>calcul de λ div(**G**) en S</u>

Ce calcul est immédiat du fait que les trois composantes de **G** en S valent $\exp(-u^2)\ erf^{\,2}(u)$. Ainsi,

(15) $$\lambda\ \mathrm{div}(\mathbf{G}) = -6u\ \exp(-u^2)\ erf^{\,2}(u) \,/\, [3\exp(-2u^2)\ erf^{\,4}(u)]^{1/2} = -2u\sqrt{3}.$$

b) <u>calcul de **grad** λ.**G** en S</u>

Le vecteur **grad** λ a trois composantes égales valant

$$[-1/(2E^{3/2})]\frac{\partial E}{\partial u} = (2/3^{3/2})[\ u\ /\ (\exp(-u^2)\ erf^{\,2}(u)) - 2\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf^{\,3}(u))].$$

On obtient donc

(16) $$\mathbf{grad}\,\lambda.\mathbf{G} = (2/3^{1/2})[\ u - 2\exp(-u^2)\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf\,(u))],$$

et, selon (14), en ajoutant (15) et (16) :

(17) $$\mathrm{div}(\mathbf{n}) = \frac{-4}{\sqrt{3}}\ [\ u + \exp(-u^2)\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf\,(u))].$$

La courbure moyenne C_S de l'isotherme K au sommet S vaut donc, dans le repère O*uvw* :

(18) $$C_S = -\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{div}(\mathbf{n}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\ [\ u + \exp(-u^2)\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf\,(u))].$$

Le retour aux coordonnée dimensionnées (x, x, x) du sommet S donne la courbure de l'isotherme en ce point au prix d'une simple division par L :

(19) $$C_S = \frac{2}{L\sqrt{3}}\ [\ \frac{x}{L} + \exp(-x^2/L^2)\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf\,(x/L))].$$

Définissons le rayon de courbure R_S de l'isotherme en S par $R_S = 1/C_S$ et posons

(20) $$u_s = x/L.$$

Il vient :

(21) $$1/R_S = \frac{2}{L\sqrt{3}}\,[u_s + \exp(-u_s^2)\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf\,(u_s))] = \frac{2}{L\sqrt{3}}\ F(u_s)$$

à condition de poser

(22) $$F(u) = u + \exp(-u^2)\ /\ (\sqrt{\pi}\ erf\,(u)).$$

La distance OS de l'origine du repère au sommet S vaut $Lu_s\sqrt{3}$. Comparée au rayon R_S on obtient :

(23) $$OS/R_S = 2u_s\,F(u_s).$$

B) <u>COURBURE D'UNE ARÊTE DE L'ISOTHERME</u>

Cette courbure est étudiée en un point A (x_A, x_A, z) dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales et dont la cote z est grande devant le facteur d'échelle L. Le point A appartient au plan bissecteur du dièdre d'arête Oz et se situe à grande distance de l'origine O du repère. La quantité *erf* (x/L) est monotone croissante sur [0,+∞[et tend très rapidement vers l'unité lorsque x/L augmente. On a en effet *erf* (0) = 0 ; *erf* (1) = 0,8427 ; *erf* (2) = 0,9953 ; *erf* (3) = 0,99998.

Les équations (6), (12) et (13) précédentes se simplifient du fait que $erf\,(z/L) \approx 1$. Le problème devient bidimensionnel et ces équations deviennent respectivement :

(24) $$erf\,(x/L)\; erf\,(y/L) = K,$$

(25) $$\mathbf{G} = [\exp(-u^2)\; erf\,(v)\; ;\; \exp(-v^2)\; erf\,(u)\; ;\; 0\;],$$

(26) $$\lambda = [\exp(-2u^2)\; erf^{\,2}(v) + \exp(-2v^2)\; erf^{\,2}(u)\;]^{-1/2}.$$

Il s'en suit qu'au point A (avec $u = v$) :

(27) $$\lambda\; \mathrm{div}(\mathbf{G}) = -4u\; \exp(-u^2)\; erf\,(u) \,/\, [2\exp(-2u^2)\; erf^{\,2}(u)]^{1/2} = -2u\sqrt{2}.$$

Le vecteur **grad** λ a deux composantes non nulles égales entre elles et valant :

$$[-1/(2E^{3/2})]\frac{\partial E}{\partial u} = \left(1/2^{1/2}\right)[\; u \,/\, (\exp(-u^2)\; erf\,(u)) - 1 \,/\, (\sqrt{\pi}\; erf^{\,2}(u))].$$

On a donc, en A :

$$\mathbf{grad}\,\lambda.\mathbf{G} = \left(2^{1/2}\right)[\; u - \exp(-u^2) \,/\, (\sqrt{\pi}\; erf\,(u))],$$

et, d'après (14), $\mathrm{div}(\mathbf{n}) = -2u\sqrt{2} + \sqrt{2}\,u - \sqrt{2}\,\exp(-u^2) \,/\, (\sqrt{\pi}\; erf\,(u))$,

(28) $$-\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{div}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\;[\; u + \exp(-u^2) \,/\, (\sqrt{\pi}\; erf\,(u))] = \frac{1}{\sqrt{2}}\; F(u).$$

Revenant aux coordonnées dimensionnées $(x_A, x_A, +\infty)$ de A, la courbure tridimensionnelle en ce point est $\frac{1}{L\sqrt{2}}\; F(x_A/L)$, et la courbure plane (dans un plan perpendiculaire à l'arête) :

(29) $$C_A = 1/R_A = \frac{2}{L\sqrt{2}}\; F(u_A), \qquad (\text{ avec } u_A = x_A\,/L\,).$$

Si H est la projection de A sur l'axe Oz, la distance HA de l'arête à cet axe vaut $x_A\,\sqrt{2}$, et le rapport HA/R_A :

(30) $$HA/R_A = (2x_A\,/L)F(u_A) = 2u_A\,F(u_A).$$

Cette relation est à comparer à l'équation (23) concernant le sommet S de l'isotherme.

C) <u>UNE PROPRIETE DU RAPPORT</u> R_A/R_S

Aux grandes valeurs de u, $erf\,(u) \to 1$ et $\exp(-u^2) \to 0$, de sorte que, d'après (22), $F(u) \approx u$.

Compte tenu de (21) et (29), le rapport des rayons de courbure R_A et R_S s'écrit :

(31) $$R_A\,/\,R_S = \sqrt{2/3}\; F(u_S)\,/\,F(u_A) \approx \sqrt{2/3}\; u_S\,/\,u_A.$$

Revenant à l'équation (6) qui définit une isotherme, on voit que les coordonnées normalisées $u_S = x_s/L$ du sommet S et $u_A = x_A/L$ d'un point A sur une arête valent respectivement :

(32) $$u_S = erfinv(K^{1/3}),$$

(33) $$u_A = erfinv(K^{1/2}).$$

Pour des isothermes très éloignées du trièdre repère Oxyz (isothermes « à l'infini »), u_S et u_A tendent vers $+\infty$ tandis que K tend vers l'unité.

Du comportement de *erf* aux très grandes valeurs de son argument :

(34) $$erf\,(u) \approx 1 - \frac{e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}},$$

on déduit celui de sa fonction réciproque *erfinv* au voisinage de l'unité (puisque $erf\,(+\infty) = 1$) :

(35) $$u = erfinv\,[erf\,(u)] \approx erfinv\,[1 - \frac{e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}}],$$

ou encore $u \approx erfinv\,[1 - \varepsilon]$, avec

(36) $$\varepsilon = \frac{e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}}.$$

Prenons le logarithme népérien des deux membres de (36) :

$$\mathrm{Log}(\varepsilon) = -u^2 - \mathrm{Log}(u) - \mathrm{Log}\,(\sqrt{\pi}),$$

(37) $$u^2 + \mathrm{Log}(u) = -\mathrm{Log}(\varepsilon) - \mathrm{Log}\,(\sqrt{\pi}).$$

Aux très grandes valeurs de u (pour $\varepsilon \ll 1$), $u^2 \gg \mathrm{Log}(u)$ et $-\mathrm{Log}(\varepsilon) \gg \mathrm{Log}\,(\sqrt{\pi})$

(38) $$u^2 \approx -\mathrm{Log}(\varepsilon),$$

(39) $$u \approx \sqrt{-\mathrm{Log}(\varepsilon)} = [-\mathrm{Log}(\varepsilon)]^{1/2}.$$

Dans ces conditions :

(40) $$erfinv\,(1 - \varepsilon) \approx [-\mathrm{Log}(\varepsilon)]^{1/2}.$$

Compte tenu de (31), (32) et (33), pour une isotherme à l'infini ($K = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$) :

(41) $$\frac{R_A}{R_S} \approx \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{erfinv(K^{1/3})}{erfinv(K^{1/2})},$$

(42) $$K^{1/2} \approx 1 - \varepsilon/2,$$

(43) $$K^{1/3} \approx 1 - \varepsilon/3,$$

(44) $$\frac{erfinv(K^{1/3})}{erfinv(K^{1/2})} \approx \frac{[-\mathrm{Log}(\varepsilon)+\mathrm{Log}(3)]^{1/3}}{[-\mathrm{Log}(\varepsilon)+\mathrm{Log}(2)]^{1/2}}.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$: $-\mathrm{Log}(\varepsilon) \gg \mathrm{Log}(3)$ et $-\mathrm{Log}(\varepsilon) \gg \mathrm{Log}(2)$.

Il vient alors :

(45) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{erfinv(K^{1/3})}{erfinv(K^{1/2})}\right] = 1.$$

Revenant à (41),

(46) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{R_A}{R_S}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816497.$$

Lors de la diffusion de la chaleur dans un trièdre trirectangle de matériau homogène (D constant) à partir de sa surface où la température reste uniforme et constante, le rapport R_A / R_S évolue de 0 pour une isotherme passant près de l'origine du repère Oxyz, jusqu'à la valeur $\sqrt{2/3}$ pour une isotherme infiniment éloignée de cette origine :

(47) $$0 < R_A / R_S < \sqrt{2/3} \ .$$